SOLUCIONES 7-9 Problemas Olimpiadas 2013

1) En la cena de Nochebuena, Juan compra una pizza enorme y la corta en 24 pedazos iguales. Marcos se come 1/6 de la pizza. Claudia se come 1/4 de lo que queda y Silvia 1/3 del resto después de que Claudia y Marcos se han servido. Si Juan se come lo que queda, ¿qué fracción de la pizza se ha comido Juan? ¿Cuántos pedazos de pizza?

|  |
| --- |
|  |

Solución

Marcos: 1/6 de 24 = 4 pedazos

Quedan 5/6 de la pizza

Claudia: ¼ (5/6) = 5/24 (5 pedazos)

1/6 + 5/24 = 9/24 (9 pedazos)

Quedan 15/24

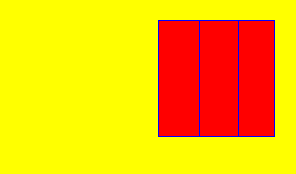
Silvia: 1/3 (15/24) = 5/24 (5 pedazos)

**Juan: 10/24 = 5/12**

**Se comió 5/12 de la pizza y (24 – (4 + 5 + 5) = 10 pedazos)**

2) Cortamos un cuadrado en tres rectángulos con rectas paralelas a un lado, como se muestra en la figura. Si el perímetro de cada uno de estos tres rectángulos es 24, ¿Cuál es el área del cuadrado original?

|  |
| --- |
|  |



Solución

Como estos tres rectángulos son iguales, y una dimensión es triple a la otra, llamaremos x y 3x a sus dimensiones, por lo que

2(x + 3x) = 24

Con o que x = 3 y el lado del cuadrado será 9. **Su área será 81**

1. Halla el dígito 500 después del punto decimal del decimal periódico 0.285714

Solución:

0.285714 = 0.285714285714285714285714…………

Cada seis dígitos es 4. Hacer una división

(500) /6 = 83 entonces se multiplica (83)6 = 498

El 498 es 4, sigue el 499 que es 2 y el 500 es el 8

**El dígito 500 es el 8.**

1. Cuatro imágenes se encuentran en la pared una pegada a la otra (ver dibujo). La imagen I es un cuadrado con un perímetro de 32 cm. Las otras tres imágenes son rectangulares. La imagen II tiene perímetro de 60 cm. La imagen IV tiene un perímetro de 84 cm. ¿Cuál es el perímetro de la imagen III?

|  |  |
| --- | --- |
| I | II |
| III | IV |

Solución:

Como la imagen I es un cuadrado y su perímetro es 32 cm, sabemos entonces que la imagen I tiene lados de 8 cm. Esto implica que la imagen II tiene lados de 8 cm y de 22 cm, y esto que la imagen IV tiene lados de 22 cm y de 20 cm. La imagen III tiene lados de 8 cm y 20 cm. Por lo tanto,  **el perímetro de la imagen es 56 cm.**

5) Cuatro Personas guardan una caja fuerte. 5a) Decir cuántas cerraduras ha de tener la caja, y cuántas llaves cada persona, para que tres personas cualesquiera de las cuatro puedan abrir la caja y dos personas no puedan. 5b) Hacer lo mismo para seis personas.

Solución:

5a) Sean A, B, C y D las cuatro personas y sean AB, AC,…,CD las seis parejas que se pueden formar. Según las condiciones del problema, al menos hay una cerradura que no puede abrir la caja de la pareja AB, pero que si puede abrir cualquiera de las otras parejas, porque en caso contrario, al reunirse las dos parejas, entre tres personas no podrán abrir la caja. Po lo tanto, existe una cerradura que solamente no es abierta por AB.

De la misma forma, existe otra cerradura que sólo no es abierta por la pareja AC, otra por la AD y así sucesivamente, se concluye que ha de haber seis cerraduras.

C y D deben tener la llave que le falta AB, para que así, al juntarse cualquiera de aquellas con esta pareja, las tres personas sí pueden abrir la caja. Por tanto de cada cerradura deben existir dos llaves.

Y por último, repartiendo el número total de llaves entre las personas resulta que

**6 cerraduras. 2 llaves / 4 personas = 3, que es el número de llaves que tiene cada una.**

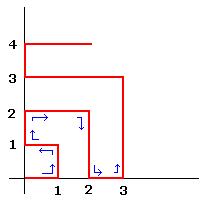
5b) Con 6 personas se pueden formar 15 parejas, exactamente como el caso anterior, sólo hay una pareja que no abre determinada cerradura, por lo que hay 15 cerraduras.

La cerradura que no abren ni A ni B, sí es abierta por cualquiera otra persona para que, así, entre las tres sí la abran. Por lo que de esta cerradura tienen llave las cuatro restantes. Hay 4 llaves de cada cerradura.

**15 cerraduras.4 llaves / 6 = 10, el número de llaves que tiene cada persona**

6) Una partícula se mueve a lo largo del primer cuadrante de la forma siguiente: durante el primer minuto va desde el origen al punto (1, 0). Luego continúa con la trayectoria indicada en la figura con velocidad constante, de manera que en cada minuto recorre una unidad de distancia con camino paralelo a algún eje. ¿En qué punto estará la partícula al cabo de una hora y media?

|  |
| --- |
|  |



Solución:

Una hora y media son 90 minutos.

Observamos en primer lugar los minutos empleados en llegar a puntos del

eje de ordenadas donde la partícula giraría a la derecha, es decir, los

puntos (0, 2), (0, 4), …: Para llegar al punto (0, 2) emplea 4 minutos; para

llegar al punto (0, 4) emplea 4 + 12 = 16 minutos; al (0, 6), 4 + 12 + 20 =

36 minutos; al (0, 8) emplea 82 = 64 minutos; al (0, 9) emplea 92 = 81

minutos. Una vez gira a la derecha se mueve por esa abcisa 90 – 81 = 9

puntos.

Por tanto, la partícula se encontrará en el punto (9, 9).

7) En el rectángulo de la figura, **M** y **N** son los puntos medios de **AD** y **BC**, respectivamente, y **P** y **Q** son las respectivas intersecciones de **AC** con **BM** y con **ND**. Suponiendo que **AD** mide 5cm y que **AB** mide 3cm, ¿cuántos centímetros tiene de superficie el cuadrilátero **MPQD**?

A M D

P

B N C

Solución:

Observemos que si juntamos los triángulos **ABM** y **DNC**, éstos formarán un rectángulo de 2.5 x 3, y que el área de **MPQD** es la mitad del área restante **MBND** para el rectángulo total, esto es: 5 x 3 - (2.5 x 3/2)=3.75.

**El cuadrilátero MBND tiene de superficie 3.75 cm**

8) En el jardín de una casa hay un árbol de mandarinas. Como el propietario no come muchas, se le ocurre regalar algunas a unos chicos que pasaban por su casa, a la salida de la escuela. Dio 7 a cada uno, y quedaron 24 en el árbol. Si hubiese tenido 32 mandarinas más, hubiera podido darle 9 a cada uno, en lugar de 7. ¿Cuántas mandarinas había y cuantos chicos pasaron?

**Solución:**

Si se llama *x* al número de mandarinas e *y* al de chicos, del primer reparto se deduce

La ecuación 7*y* + 24 = *x.* De la suposición de tener 32 mandarinas más, y de las

condiciones de su hipotético reparto, se obtiene 9*y*  = *x* + 32. Si se despeja la

incógnita *x* en la segunda ecuación, ésta se transforma en su equivalente 9*y* – 32 = *x*.

Por tanto, al tomar los primeros miembros de cada una de las dos ecuaciones (ambos

iguales al mismo valor *x*), se puede lograr la ecuación con una sola incógnita *y*. 7*y* +

24 = 9*y* – 32. Tras despejar *y*, se obtiene que *y*  = 28. Al sustituir este valor en

cualquiera de las dos ecuaciones originales se deduce que *x* = 220.

**Por tanto, había 200 mandarinas en el árbol y pasaron 28 chicos.**

9) Marta, Lledó y Cristina suben una escalera de 54 escalones. Marta sube los escalones de uno en uno, pisando los escalones 1, 2 , 3, 4, ... 53 y 54. Lledó sube los escalones de dos en dos, pisando los escalones 2, 4, 6, … 52 y 54. Cristina, que tiene las piernas más largas, sube de tres en tres, pisando los escalones 3, 6, 9, … 51 y 54. ¿Cuál es el número de escalones que sólo pisan dos de las tres chicas?

|  |
| --- |
|  |

Solución:

De los 54 escalones deben excluirse los que pisan los tres y los que pisa

solamente una persona.

Los que son pisados por los tres son los múltiplos de 2 y de 3, o sea, de 6:

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48 y 54. Son 9.

Los que sólo pisa una persona son los primos (excluidos el 2 y el 3): 1, 5,

7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 y 53. Son 15.

Además deben excluirse los múltiplos de 5 impares que no sean múltiplos

de 3: 25 y 35. Son 2.

Y por último deben excluirse los múltiplos de 7 impares que no sean

múltiplos de 3: El 49.

Total excluidos: 9 + 15 + 2 + 1 = 27

**27 es el número de escalones que sólo pisan dos de las tres chicas**

10) En tres granjas hay un total de 333 animales. En la primera granja hay el triple de animales que en la segunda y en la segunda, el doble que en la tercera.

¿Cuántos animales habrá que pasar de la primera granja a la segunda y a la tercera para que el número de animales en cada granja sea un número de tres cifras capicúa distinto?

(el número capicúa se lee de izquierda a derecha y de derecha a izquierda de igual manera)

Solución:

Sabemos que en la primera granja hay el triple de los animales que en la segunda y en la segunda, el doble que en la tercera. Eso quiere decir que por cada animal que haya en la tercera, en la segunda hay dos y en la primera hay seis. De esta forma, hemos encontrado que hay en las granjas un total de 9 animales. Si vamos situándolos de 9 en 9, respetando es proporción, obtendremos al final 333/9 = 37 animales en la tercera, 74 en la segunda y 222 en la primera, que es la cantidad que respeta las condiciones.

Ahora hay que conseguir, pasando animales de la primera a la segunda y a la tercera tres cantidades capicúas pero que sumen 333. Necesitamos tres números capicúas de tres cifras y distintas, que sumen 333. Evidentemente, en los tres se comenzarán y terminarán con 1, pero que sean distintos, los números del centro deben sumar 3, así que solo pueden ser 0,1 y 2. Así que las cantidades serán 101, 111 y 121. Pero lo más sencillo sería pasar 101 – 37= 64 a la tercera, 111 – 74 = 37 a la segunda, dejando **222 – (37 + 64 ) = 121.**